

Outliers bayesianos em Estatística Forense?

Fernando Rosado

*Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Departamento de Estatística e Investigação Operacional
Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa
fernando.rosado@fc.ul.pt*

*For the rational study of the law the
black letter man may be the man of the
present, but the man of the future is the
man [woman] of statistics and the
master of economics.*

Oliver Wendell Holmes
The Path of the Law (1897)

Resumo: Na Estatística, principalmente nas suas aplicações, desde há cerca de 20 anos que se tem registado um grande avanço nas metodologias bayesianas. Na teoria dos outliers, como se sabe, é de referência fundamental o tratado de Barnett e Lewis, cuja primeira edição foi publicada há 30 anos. Por sua vez, a abordagem bayesiana a alguns problemas no estudo de observações discordantes teve uma contemplação inicial nos trabalhos de Box e Tiao há 40 anos.

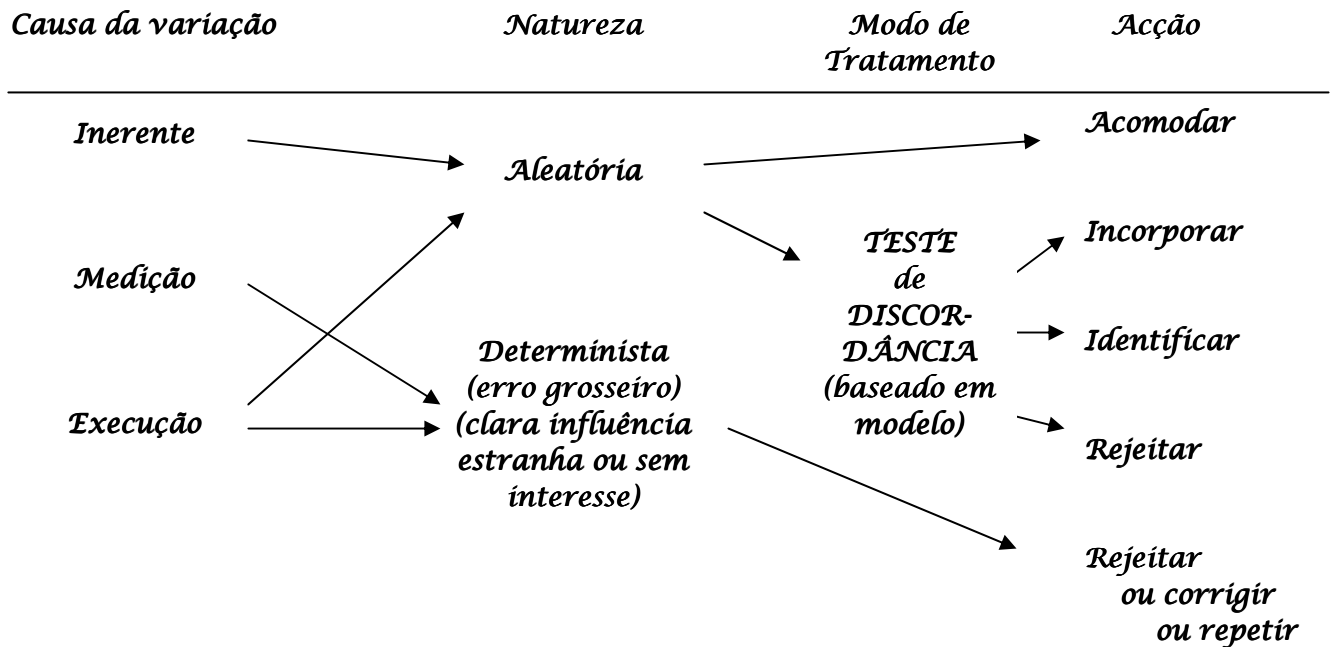
Três marcos importantes, que revisitamos!

Na dicotomia “frequentista” e “bayesiana” é muito importante enquadrar a problemática do estudo estatístico de outliers. A Estatística Forense - ramo muito recente da ciência estatística torna aquela questão particularmente relevante uma vez que ela usa fundamentalmente a abordagem bayesiana. Poucos passos têm sido dados. Fazemos um ponto da situação. Apresentamos alguma reflexão sobre esta problemática.

Palavras - chave: outliers, estatística forense, razão das chances (odds ratio), análise bayesiana.

I – Sobre o “estudo de outliers”

Em todos os dados estatísticos “podem surgir” valores discordantes. Podemos identificar diferentes fontes de variação responsáveis pelo aparecimento desses valores - determinísticos ou aleatórios - e igualmente diversas acções que se podem levar a cabo. Na figura abaixo apresenta-se um esquema¹ que compila e conjuga os diversos trajectos simbolicamente apresentados.



Tratamento de Outliers - Método Tradicional
Barnett and Lewis (1994, p. 42)



“A SUBJECTIVIDADE”

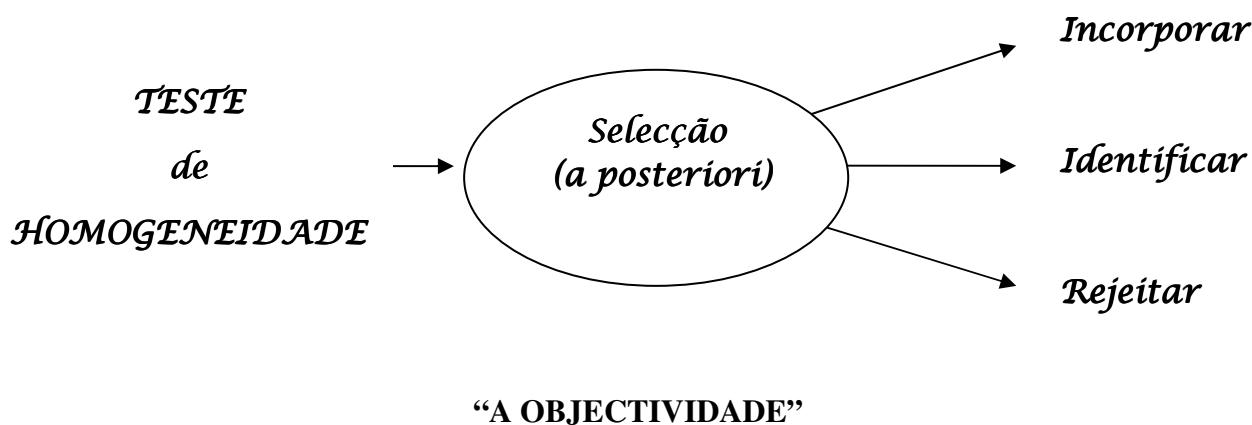
¹ Cf. Barnett and Lewis (1994, p. 41 e seg.) para maior detalhe e aprofundamento dos mecanismos de geração de dados discordantes. Também, Hawkins (1980) é uma opção.

Como veremos, na nossa perspectiva, podemos sintetizar o estudo de observações discordantes numa amostra em dois esquemas dicotómicos: o tradicional² (acima apresentado em esquema) e o generativo (que se apresenta abaixo).

No modelo tradicional para o estudo de outliers, esquematicamente apresentado na figura anterior, o objectivo principal é testar uma observação como discordante. O valor testado é previamente escolhido pelo analista. Esta é a primeira característica que afirma e garante a subjectividade desta análise, dita tradicional.

Pelo contrário, no estudo proposto em Rosado (1984) e Rosado (2006) introduz-se objectividade na análise dos valores discordantes em uma amostra de dados estatísticos. De acordo com esta metodologia o principal problema de um estudo de outliers é a decisão sobre a homogeneidade da amostra, isto é, saber se estamos perante valores estatísticos que não apresentam qualquer distorção à hipótese de terem sido gerados por uma única distribuição de probabilidade. Em esquema temos a figura seguinte de onde se realça a permuta nas duas primeiras fases da análise em comparação com o método tradicional acima descrito. Aqui, a observação, eventualmente, decidida como outlier não é fixada subjectivamente pelo analista. Adiante, voltaremos a este assunto mais em pormenor.

Tratamento de Outliers - Método Generativo
Rosado (2006)



Generalidades

Este texto (também e, principalmente, de reflexão) é atravessado pelos paradigmas clássico e bayesiano. Entraremos assim nessas metodologias, até ao desejado, para a compreensão da questão a que nos propomos dar um pouco de resposta: a problemática do estudo de observações discordantes em Estatística Forense. O aprofundamento das questões metodológicas que abordaremos pode, por exemplo, ser feito³ em Paulino *et al* (2003).

A inferência clássica é, talvez, assim chamada pela predominância histórica dos seus principais dinamizadores Pearson, Fisher e Neyman, na primeira metade do século XX. Alguns autores, em particular no último quartel desse século, preconizam que a substituição do paradigma clássico pelo bayesiano, representando uma verdadeira revolução científica, revela também “uma tendência

² Cf. Barnett and Lewis (1994) e Rosado (2006) para os detalhes. No seguimento deste texto apresentaremos os principais fundamentos para cada um desses trajectos para o estudo de outliers numa amostra.

³ Em particular através do capítulo inicial da obra referida.

científica” que passaria a estar na moda até pelo seu poder apelativo para a resolução de problemas⁴. Outros autores, talvez mais prudentes, mostram como, também na ciência, a união faz a força. Para esses, o desenvolvimento da moderna teoria estatística assenta num triângulo⁵ com vértices em “bayesianos”, “frequentistas” e “fisherianos”.

Numa perspectiva (dita) clássica a Estatística usa e apoia-se numa abordagem frequentista de probabilidade. A Estatística como disciplina científica organizada e formal é muito recente quando comparada com a Física ou a Química ou a Biologia. A Matemática, essa sim, é muito mais antiga.

Os avanços na Estatística forneceram alternativas àquela construção clássica e apareceram concorrentes directas que disputam os pontos de apoio. São elas: a inferência bayesiana e também a teoria da decisão, estando estas duas muito perto quando comparadas⁶ com a estatística clássica. Esta, em resumo, e como se sabe, constrói-se com os conceitos, critérios e métodos dos tempos de Fisher, Neyman e Pearson.

Muitas vezes, a grande atracção por determinada metodologia está relacionada com o comportamento⁷ físico e a capacidade para - ou a possibilidade de - se encontrar a solução para resolver problemas num largo domínio.

Mas, se a Estatística é uma ciência, numa actualização da terminologia essa palavra⁸ deve significar e incluir a clássica, a bayesiana e a teoria da decisão. Um bom resumo pode consultar-se em Stuart, Ord and Arnold (1999) ou em O’Hagan (1994) para o tema que mais nos interessa.

Diversos autores podem ser citados e muitos livros existem dedicados a temas especiais quer na Estatística clássica ou bayesiana - análise e planeamento de experiências, modelos lineares generalizados, análise multivariada, análise de regressão ou robustez - quer das correspondentes situações para a Estatística não bayesiana⁹.

Ao iniciar um estudo geral sobre outliers em dados estatísticos existem dois percursos, acima representados, em alternativa: o tradicional (envolvendo a subjectividade) e o generativo (caracterizado pela objectividade). Um ponto de partida, para a opção a tomar, deve ter em conta que “toda a informação contida numa amostra deve ser usada na estimação dos parâmetros e é relevante”. Fisher (1922)

Um critério de trabalho estatístico pode ser então fundamentado no propósito de que toda a estatística deve resumir, completamente, a informação fornecida pela amostra.

Esse é referido como o critério de suficiência, Fisher (1922, p. 316). Com este objectivo em mente, Fisher construiu então o chamado método da máxima verosimilhança - um grande instrumento de trabalho para os estatísticos - como uma solução formal para os problemas de estimação¹⁰.

Neste ambiente científico se enquadra o método generativo com alternativa natural (Rosado 2006) para o tratamento de outliers em dados estatísticos.

Outliers e Métodos bayesianos

Em ambos os percursos acima definidos, a base de decisão é um teste de discordância.

Mas, na metodologia bayesiana não existe analogia ao chamado teste de discordância para o estudo de observações suspeitas (Barnett and Lewis (1994, p. 378)) embora do ponto de vista prático tenham sido apresentados vários testes para analisar outliers do ponto de vista bayesiano. Vulgarmente é referenciada de Finetti (1961) como uma das primeiras contribuições, embora apresente mais reflexão

⁴ Cf. Lindley (1990)

⁵ Cf. Efron (2000, p. 137).

⁶ Cf. Barnett (1999, cap. 5, 6 e 7)

⁷ Cf. Cox (1978).

⁸ Os dicionários ainda nos apresentam a Estatística como: “Ramo das matemáticas aplicadas cujos princípios derivam da teoria das probabilidades, que tem por **objecto** o agrupamento metódico assim como o estudo de séries de factos ou de dados numéricos”. (Dicionário Priberam da Língua Portuguesa disponível em <http://www.priberam.pt/DLPO/>)

⁹ Para a questão dos outliers: Cf. Barnett (1999, em particular p. 160).

¹⁰ *ib.* p. 323.

sobre as atitudes a tomar numa exploração dos dados do que alguma técnica para estudo. A discussão centra-se no contexto de que alguma quantidade X tendo uma distribuição inicial (*prior*) a qual possa ser modificada a partir de uma amostra x_1, \dots, x_n para ser produzida uma distribuição final para X (*posterior*). Conclui então que uma observação servindo como candidata para rejeição tem influência “fraca ou negligenciável” na distribuição final. Alguma justificação para esta abordagem “superficial” - à luz da actual teoria dos outliers - pode ser encontrada pelo facto de que os testes de discordância e os correspondentes modelos para estudo ainda não tinham sido consolidados; estavam a dar os primeiros passos com trabalhos de, por exemplo, Ferguson (1961a,b).

Um “primeiro ponto da situação”

A análise bayesiana de observações discordantes tem sido objecto de alguma evolução nos tratados sobre o estudo de outliers. Um bom registo dessa alteração pode ser feito através de uma parcimoniosa observação do modo como é evolutivamente apresentada nas duas edições de referência para o estudo de observações discordantes numa amostra, por exemplo, em Barnett and Lewis (1978) e em Barnett and Lewis (1994). De facto, as mesmas dezasseis páginas desses dois livros abordam de modo diverso a mesma problemática e, desde logo nos respectivos títulos: “Bayesian Approaches to Outliers” em Barnett and Lewis (1994, p. 377-94) enquanto se lê “Bayesian and Non-Parametric Approaches” em (Barnett and Lewis (1978, p. 269-85).

Um estudo de outliers em dados estatísticos, em termos gerais, pode ser elaborado em duas vertentes: a tradicional e a generalista. (Rosado 2006, cap. 4) e Barnett and Lewis (1978, p. 28 e 1994, p. 42). O que fazer numa perspectiva bayesiana?

Em ambas as abordagens torna-se premente e é fundamental um teste de discordância. Ora, como vimos, no contexto da análise bayesiana, alguns autores consideram que um teste de discordância tem pouca importância (Barnett and Lewis (1978, p. 269)). Numa análise geral, a estatística bayesiana torna mais difícil a distinção entre a detecção e a acomodação de observações discordantes numa amostra.

Numa selecção (bayesiana) - *a priori* - se o experimentador escolhe uma observação candidata vulgarmente o máximo ou o mínimo (e mais o máximo do que o mínimo?) pode influenciar (influencia!) por tendência a conclusão. “Bayesianismo” é então aplicável?

Fixado o modelo de discordância, nestas perspectivas, o experimentador / analista, subjectivamente, “controla o caso e o acaso”. Também, no ambiente bayesiano, particularmente na selecção de valores discordantes - a estatística de máxima verosimilhança é muito relevante e deve ser ajuntada à metodologia de trabalho.

“Um método?”

Barnett and Lewis (1994, p. 379) consideram “irrelevante” o teste de discordância em “tratamento de outliers bayesianos”. Optam pela acomodação de outliers numa perspectiva bayesiana. Esta é uma opção que contorna o verdadeiro problema no estudo de outliers: a existência. Ao contrário, Hawkins (1980, cap. 9) apresenta um “teste” e estuda-o através do exemplo “de astronomia” que abaixo abordaremos. Dada a relevância daquela perspectiva, este teste - que usa a razão de vantagens ou das chances ou odds ratio - pode ser particularmente interessante no estudo de outliers em ambiente bayesiano e, em particular, em Estatística Forense.

Evidência e outliers em Estatística Forense – uma reflexão (I)

Uma evidência E de uma hipótese H é qualquer dado que pode ser usado para decidir sobre a aceitabilidade ou a probabilidade de H (usando a primeira numa perspectiva não-bayesiana e a segunda correspondendo à abordagem bayesiana). Na estatística bayesiana a evidência E pode “apoiar” ou “minar” a hipótese H enquanto que os não-bayesianos consideram que a hipótese apenas pode ser “minada” por E .

Muitos analistas consideram a importância do estudo “subjectivo” de observações discordantes que surjam nas caudas da distribuição envolvida num modelo concreto para “descobrir” outliers.

Seguindo de perto uma metodologia bayesiana é, muitas vezes, utilizada a razão de vantagens $O(H/E) / O(H)$. Usando esta formalização, Hawkins (1980, cap. 9) propõe “um teste” para estudo de outliers numa abordagem bayesiana. Esse “teste” pode decidir sobre a presença de um outlier.

Na sequência dos primeiros resultados de Lindley (1977) e seguindo métodos de Aitken and Taroni (2004) e Aitken *et al* (2007) usam, de novo, a razão de vantagens em dois níveis para estudar a evidência.

A perspectiva generativa acima enunciada permite “indicar” qual a observação discordante que deverá ser candidata a outlier. Poderemos pois combinar estes dois estudos, que se completam, para analisar outliers em “ambiente bayesiano” como o que se encontra na estatística forense. A Estatística suporta e gera todas as estatísticas que são usadas em qualquer tomada de decisão. Elas, por sua vez, são baseadas (totalmente?) na evidência (estatística) produzida pela amostra / conjunto de dados. Em todos os domínios científicos estes pressupostos conjugam-se mas, do ponto de vista conceptual, tomam mais relevo na Estatística Forense onde a “evidência” e “a prova” são os principais “instrumentos de trabalho” onde se perfilam, como concorrentes de igual peso, as abordagens bayesiana e não-bayesiana. Estes temas na emergente Estatística Forense têm gerado alguma produção científica que releva a sua importância neste domínio (veja-se, a recente edição da Revista Internacional de Estatística “Featuring a Collection of Papers on Forensic Statistics”, editada por Balding e Gastwirth em 2003 ou, numa perspectiva estatisticamente menos profunda, Aitken and Taroni (2004)). Uma abordagem bayesiana (também para o estudo de outliers!) exige pressupostos *a priori* acerca de possíveis modelos ou sobre a família paramétrica dos modelos.

Evidência e outliers em Estatística Forense – uma reflexão (II)

As observações discordantes são uma manifestação da contaminação dos dados / da amostra e, por isso, apenas elas contêm “informação *a priori*”.

Assim, ao fixarmos modelos de discordância com (apenas) um valor discrepante estamos numa situação de algum conflito entre a “resposta dos dados” às observações anómalas e a inclusão de “dados independentes” que geram as probabilidades *a priori* do contexto bayesiano.

Estes pressupostos ofuscam e dificultam um estudo estatístico de outliers numa perspectiva bayesiana e fazem sobressair a acomodação como primordial nesse caso (Barnett and Lewis (1994, cap.9).

Em conclusão, (embora restringindo?) o campo estatístico mais favorável para a descoberta de outliers numa amostra é a abordagem “não-bayesiana”. Nela, são irrelevantes muitas das dificuldades conceptuais acima referenciadas.

E, sendo assim, outliers, análise bayesiana e estatística forense são palavras-chave que se devem ligar para um aprofundamento em benefício da ciência Estatística.

II - Sobre o estudo de outliers numa perspectiva bayesiana

A problemática bayesiana no estudo de outliers acompanha todo o método de inferência estatística desde a construção da amostra. Esta questão, já foi um pouco discutida em Rosado (2006, p. 198) e envolve a própria dimensão. Não é sobre esse tema que desejamos continuar. Em alternativa, aprofundamos, um pouco mais, a história da pesquisa de observações discordantes de um ponto de vista bayesiano. Sabemos - é verdade irrefutável - que, cada uma das edições do tratado fundamental *Outliers in Statistical Data* por Barnett and Lewis, é uma fonte para a recolha de informação sobre o

estado da arte em três épocas distintas¹¹ da evolução da Estatística, nesse assunto, no século XX. Alguém disse: Se, até lá, existe artigo científico relevante sobre outliers decerto ele está referenciado em alguma das edições nomeadas. E assim é!

Pesquisemos então nessas obras com a intenção de concluir sobre a história e a evolução do estudo de valores aberrantes em dados estatísticos sobre o ponto de vista de uma análise bayesiana. A primeira edição, Barnett and Lewis (1978), teve um grande impacto na comunidade científica pela sistematização implementada. Para justificar, basta afirmar que, devido à enorme produção, a segunda edição saiu seis anos depois acrescentando novos temas e, principalmente para o nosso objectivo, reorganizando e redireccionando outros. É o que se passou com o capítulo dedicado aos “outliers bayesianos”. Esse texto, de que acima já falámos, foi, quase na totalidade, reformulado - principalmente nos temas centrais - com alterações significativas na passagem da primeira para a segunda edição. Por sua vez, a terceira edição, mais estável e surgida dez anos depois, manteve a estrutura já definida na anterior sobre o tema. Assim, a “grande mudança” concretizou-se no último quartel do século XX. Como? Tentaremos explicar através (e também com o auxílio) desses tratados.

A primeira grande alteração (reveladora!) está logo no título do capítulo: “Bayesian and non-parametric approaches”, na primeira e “Bayesian approach to outliers” (nas segunda e terceira edições). A nossa análise deve então incidir no cotejo entre as duas primeiras edições. A primeira edição, logo no início do capítulo 8, praticamente desvanece a importância daquela abordagem, uma vez que “in the context of the bayesian approach a test of significance has little relevance” (Barnett and Lewis, 1978, p. 269). Assim, o importante instrumento prático de trabalho estatístico para a avaliação de observações discordantes numa amostra - o teste de significância - fica carente de alguma adaptação e exige reestruturação. A frase supracitada caiu nas restantes edições. A opção desses autores foi investir na perspectiva da acomodação de outliers em detrimento daqueles testes. Contornaram deste modo uma questão cuja resposta (ainda hoje) se procura e que não é fácil: Como construir testes de discordância num contexto bayesiano? A resposta a esta questão envolve um excelente projecto de investigação.

Uma das primeiras contribuições para o estudo de outliers numa perspectiva bayesiana foi dada por de Finetti (1961), (embora apenas) com uma exploração das atitudes em detrimento da construção de técnicas. Citamos “a opinião” de Barnett and Lewis sobre esse artigo: “He is primarily concerned with exploring basic attitudes rather than developing technique. The discussion is set in the context of some quantity X having an initial (prior) distribution which becomes modified in the light of a sample of observations x_1, x_2, \dots, x_n to yield a final (posterior) distribution for X . There is no estimation or testing problem - the total inference is expressed by the final distribution of X . Claiming that *all* inference problems are so represented, de Finetti argues that any reasonable approach to outlier rejection needs to be couched in such terms. (...) He concludes that if rejection of outliers has any propriety this must hinge on the fact that any observation serving as a candidate for rejection has a ‘weak or practically negligible’ influence on the final distribution. This point of view opposes much of the *rationale* for outlier processing described throughout this book. There would seem to be little point in, or basis for, *either rejecting or accommodating* outliers if their presence has *negligible* influence on the inferential import of the data!” (Barnett and Lewis, (1994) p. 378-9). Depois desta reflexão sobre o tema, Barnett and Lewis introduzem o chamado modelo permutável (*exchangeable* model) (Barnett and Lewis, (1994), cap. 2 e p. 379).

É muito importante salientar que o enquadramento feito, por Barnett and Lewis, é também condicionado pelo modelo de discordância e pela selecção *a priori* em que sempre se colocam quando executam um estudo de outliers onde, como sabemos, apenas desejam confirmar uma observação da qual subjectivamente suspeitam e que previamente seleccionaram para ser testada como discordante. Como também sabemos, não é esta a perspectiva proposta, em 1984, por Rosado (cf. Rosado (2006), cap 4) onde a principal diferença é “o ponto de partida” onde todas as observações são possíveis como

¹¹ Cf. Barnett and Lewis (1978), Barnett and Lewis (1984) e Barnett and Lewis (1994).

candidatas a outlier. Por consequência, neste ponto, os métodos propostos por Barnett and Lewis e por Rosado são diversos.

Pela generalidade e também pelo pioneirismo, talvez se possa afirmar que o primeiro estudo com uma abordagem detalhada para a detecção e teste de outliers foi proposto por Dempster and Rosner (1971). Estes autores consideram o estudo de k outliers num contexto “semi-bayesiano” porque propõem uma combinação linear de análise onde o k é fixado e ao mesmo tempo constroem testes de significância onde não se admite *a priori* qualquer distribuição para os possíveis valores de k .

Evoluindo a partir daqui e admitida como alternativa, a acomodação bayesiana de outliers, como se disse, é um tema que atingiu grande desenvolvimento, desde a segunda edição, em Barnett and Lewis (1984). O “assunto” aí introduzido e (ainda) baseado em algumas propostas de de Finetti vai evoluindo para as importantes questões de *outlier proneness*. Ser *outlier prone* ou *outlier resistant* é uma condição que, em cada distribuição, se prende directamente com a “característica bayesiana” do(s) parâmetro(s) e do estudo. A grande maioria das propostas formuladas neste contexto envolvem o *modelo permutável* acima referido e que se baseia em Kale and Sinha (1971). Neste estudo, é interessante focalizar sobre “expected life” que nos remete para um ambiente científico exponencial em detrimento da (sempre?) desejada ambiência estatística normal. Nalgumas situações “mais particulares” é mais fácil produzir ciência - também na teoria dos outliers. Daqui se pode inferir que a distribuição probabilística em presença pode condicionar ou pelo menos dirigir e encaminhar a análise de observações discordantes numa amostra - qualquer que seja o ponto de vista em que nos coloquemos.

Em síntese, concordando com Barnett and Lewis (1994, p. 378) podemos afirmar que: “There is no direct Bayesian analogue of the test of discordancy (although we shall note some general proposals for a Bayesian form of test). Its place is taken in the Bayesian approach by a battery of procedures designed to provide a posterior probability assessment of the degree of contamination of the data using a basic model which contains additional parameters reflecting possible contamination”.

A maior parte das propostas científicas para estudo de outliers num ponto de vista bayesiano envolvem modelos semelhantes à forma *permutável* e a opção surge logo na segunda edição de Barnett and Lewis (1984, p. 42-3).

Com estes vinte e cinco anos de percurso, em todos os modelos propostos existe sempre um ponto comum fundamental para uma abordagem metodológica no estudo de outliers: a observação discordante testada é sempre fixada *a priori* pelo analista.

Obviamente, esta subjectividade é limitativa.

E, neste domínio, muito há para fazer!

Permutabilidade e Análise bayesiana: em complementaridade ou em oposição?

Seja H_0 uma “hipótese nula”¹² que justifica a não existência de observações discordantes numa amostra. Uma hipótese alternativa a H_0 , por sua vez, permite assumir a presença de algum outlier. Historicamente, a alternativa mais usada supõe que existe um deslizamento em algum parâmetro da distribuição base para a amostra.¹³

A propósito e no âmbito destas “reflexões bayesianas” sobre o estudo de outliers, é muito importante, analisar a problemática da justificação da presença de observações discordantes numa amostra - outliers ou contaminantes? É uma proposta de trabalho muito exigente e para a qual não se vislumbra solução - apenas opções de trabalho.¹⁴

¹² Esta terminologia geral dos testes estatísticos pode e deve ser adaptada no estudo de outliers; principalmente, na formulação de alternativas. Na realidade a teoria dos outliers contempla, em oposição, as hipóteses de ausência (“a nula”) ou de presença de observações discordantes (“a alternativa”). E, é esta que requer maior cuidado em cada especificação de modelos de discordância pois, na realidade, ela pode ser uma “união de hipóteses” (Rosado (2006, p. 76)).

¹³ Consulte-se, por exemplo, a alternativa slippage nos diversos estudos apresentados em Barnett and Lewis (1994, p. 35-6).

¹⁴ Alguma reflexão um pouco mais aprofundada pode seguir-se em Rosado (2006, cap. 2).

A alternativa permutável¹⁵ é, segundo alguns autores, uma formulação generalizada do deslizamento e inicialmente abordada por Kale and Sinha (1971). Para estes, se uma amostra contém apenas um contaminante (o que é?) então, numa forma geral $x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n$ são observações independentes de uma distribuição F enquanto que x_k é uma observação de uma distribuição G. É também admitido que o índice k da observação contaminante é igualmente provável de entre os valores $1, \dots, n$. As variáveis X_1, \dots, X_n deste modelo são não independentes mas permutáveis. Assim, é introduzida uma alternativa permutável onde a função de verosimilhança é

$$L(x|F, G) = \frac{1}{n} \sum_i g(x_i) \prod_{j \neq i} f(x_j)$$

onde f e g são as funções densidade de probabilidade das distribuições F e G.

Na formulação geral, esta alternativa permutável é idêntica na forma (embora diferente na motivação) daquela que poderá ser usada numa análise bayesiana com a alternativa por deslizamento com probabilidade igual *a priori* para o índice da observação gerada por G e como é descrito em Guttman (1973). Este¹⁶ é um ponto muito importante na divergência das abordagens bayesianas e não bayesianas na análise de outliers numa amostra de dados estatísticos. É esta diferente sensibilidade para opções estratégicas de metodologias inferenciais que está na base das grandes alterações introduzidas nas 3 edições de Barnett and Lewis nos livros *Outliers in Statistical Data* e que, fundamentalmente, remetem para os estudos de acomodação para contornar a problemática.¹⁷

(Muita) subjectividade

Uma rápida “consulta da história”, (também no âmbito da análise bayesiana) para além do(s) tratado(s) de Barnett and Lewis, facilmente nos permite concluir sobre a natureza subjectiva dos processos e métodos de rejeição de outliers. Assim, subjectividade e análise bayesiana assumem particularidades mas também similitudes que se podem conjugar na investigação.

Façamos uma viagem em três penadas.

Há 50 anos, foi consolidado o objectivo do estudo de outliers numa amostra com a sistematização dos testes e regras de rejeição. Em particular, iniciam-se os primeiros estudos que abordam as diferenças entre testes de significância e políticas de rejeição. Anscombe (1960), já refere estas preocupações e que ilustra com os primeiros testes de Chauvenet (100 anos atrás).

Na década seguinte, estabeleceu-se a natureza subjectiva da análise de outliers com a introdução de designações alternativas para as observações que surpreendem o analista e para aquelas que são discordantes na amostra. Foi consolidada a natureza subjectiva do estudo de outliers. Collett and Lewis (1976), por exemplo, aprofundam estas questões e pronunciam-se sobre a probabilidade de uma observação ser julgada surpreendente por um analista e que é diferente da probabilidade de essa observação ser identificada como discordante.

Há 25 anos atrás, Beckman and Cook (1983) actualizam a perspectiva histórica e “puxam” um pouco para a análise bayesiana que, de facto, está por detrás da subjectividade já referida. Os cientistas que discutiram esse artigo tiveram a necessidade de clarificar “do que estavam a falar” e tudo passava pela “surpresa do dado em estudo”.

Há 20 anos, Muñoz-Garcia, Moreno-Rebolo and Pacual-Acosta (1990), dentro do mesmo assunto, propuseram técnicas de identificação no âmbito de uma nova definição de outlier e que pretendem evitar “the subjective element of specification”, como afirmam Barnett and Lewis (1994, p. 53). Na

¹⁵ *Exchangeable* na terminologia de Barnett and Lewis (1994, p. 35-6).

¹⁶ Cf. Barnett and Lewis (1994, p. 47-9 e 385-404)

¹⁷ Como motivação, comparem-se os capítulos 8 e 12 das 1ª e 2ª edições e, em particular, as páginas 272 e 346 das mesmas. A “opção de estudo” ainda se torna mais clara se compararmos as páginas 344 e 378 das 2ª e 3ª edições, respectivamente, onde a perspectiva bayesiana é, claramente, “redireccionada”. A consolidação é feita na 3ª edição com a divisão do texto em quatro partes e onde a última - intitulada Special Topics - inclui o capítulo com o tratamento bayesiano dos outliers. No prefácio da 3ª edição dizem os autores: “Topics on which the coverage is new or has been substantially changed or extended include (...) bayesian methods (...)”

década anterior, Rosado (1984) tinha avançado nesse mesmo caminho com a introdução do modelo generativo de alternativa natural. (Rosado (2006, cap. 4)).

A alternativa natural

O estudo de observações discordantes em dados estatísticos fundamenta-se em testes de hipóteses e as diferentes opções apoiam-se em hipóteses alternativas à “hipótese nula”. Esta, como já referimos, pressupõe que não existem discrepâncias entre os dados.

As alternativas por deslizamento (*slippage*) e permutáveis (*exchangeable*) geram os modelos de discordância que - do ponto de vista da Teoria dos Outliers - correspondem a situações extremas na generalidade da abordagem. Em ambas, a formulação é bastante geral e, também em ambas, se caminha por dois pontos de vista “antagónicos” na aceitação da perspectiva bayesiana do estudo. Digamos que, se uma é pró a outra é contra.

A alternativa por deslizamento - que se funda nos trabalhos de Ferguson (1961) - modela alterações nos parâmetros de localização e de escala em ambiente de populações normais. Considera uma “perturbação geral” $\sigma_i^2 = \sigma^2 \exp(\Delta a_i)$ ($i=1, \dots, n$) para algum índice i com a_i constantes positivas mas o estudo fica limitado ao fixar $\Delta > 0$. Assume-se assim que, no estudo de observações discordantes “ Δ is irrelevant to the outlier problem”, Barnett and Lewis (1994, p. 48). Mas, porquê irrelevante? A resposta está implícita na opção metodológica “tradicional” onde o objectivo é a construção de um teste de discordância para um determinada observação - previamente seleccionada, e apenas para essa observação.

A alternativa permutável, com base em trabalhos de Kale and Sinha (1971), na sua formulação geral é “identical in form (if different in motivation) to that which would be employed in a Bayesian analysis of the slippage alternative with equal prior probabilities for the index of the observation which arises from the anomalous family” (Barnett and Lewis (1994, p. 51)).

A alternativa natural, proposta em Rosado (1984), envolve ela própria também a construção de um modelo de discordância natural. Este, no seu fundamento, considera que o índice da observação perturbadora pode ser qualquer um dos n possíveis numa amostra de dimensão n ; tal como nas alternativas permutáveis. Além disso, a alternativa natural admite que a perturbação possa ser feita em qualquer dos parâmetros e, portanto, engloba o deslizamento acima definido. Formulado esse modelo de discordância natural, o estudo prossegue com um teste de homogeneidade da amostra e não com um teste de discordância sempre proposto por aqueles métodos “tradicionalistas”. É, assim, possível conciliar essas duas metodologias gerais para o estudo de outliers - o deslizamento e a permutabilidade¹⁸.

O método GAN - *a priori vs a posteriori*

Consideremos uma hipótese H_0 onde é assumida a não existência de observações discordantes, isto é, segundo a qual a amostra em estudo é extraída de uma determinada população onde F_0 é a distribuição de interesse e todas as observações são por ela geradas. Na formulação de um modelo de discordância, para além de H_0 deve ser introduzida a hipótese H_1 de existência de “outliers” na amostra. Como já sabemos, diversas hipóteses alternativas têm sido consideradas e que condicionam a discordância de uma observação. A cada modelo alternativo corresponde uma situação bastante particular para os testes que têm sido formulados. De tal modo assim é que, para as várias hipóteses alternativas e para os correspondentes modelos de discordância, não é possível apresentar testes de discordância que utilizem tais hipóteses em pleno, sem qualquer restrição, no que se refere às observações a testar. É, pois, fundamental a introdução de uma metodologia geral.

Para os objectivos a que nos propomos e, em jeito de resumo, podemos afirmar que, os testes de discordância mais estudados consideram modelos onde são formuladas hipóteses alternativas inerentes, por contaminação ou mistura, por deslizamento, por deslizamento indexado e, com variáveis permutáveis (de origem bayesiana).

¹⁸ Para uma análise generalista e teórica de permutabilidade e a visão bayesiana sugere-se Santos (2008).

O método que definiremos, apresentando uma nova abordagem ao estudo de "outliers", formula um modelo que podemos considerar geral, no sentido da não restrição pela hipótese alternativa que, em todos os outros, fixa a observação que vai ser analisada pelo teste.

Os modelos de discordância com alternativas inerentes, contrapõem genericamente duas distribuições para a população. Fixado um modelo básico com função de distribuição F_0 , para a população, na ausência de "outliers" e, detectado/seleccionado um valor discordante, admite-se com uma alternativa inerente que, todas as observações seguem uma mesma lei F_1 , sob a qual o "outlier" perde a condição de valor surpreendente. O método generativo com alternativa natural - adiante designado por método GAN - é fundamentado em princípios de máxima verosimilhança.

O método GAN para pesquisa, selecção e tratamento estatístico de "outliers" consta das três fases seguintes:

- Formulação do modelo de discordância natural.
- Teste de homogeneidade da amostra.
- Selecção objectiva do (ou dos) "outlier(s)".

Uma simbiose desta metodologia com a alternativa permutável e a alternativa por deslizamento, acima referenciadas, permite a "aplicabilidade numa perspectiva bayesiana".

Depois de numa primeira fase se construírem as hipóteses do modelo e onde se assume a alternativa natural, o nosso método generativo propõe um teste de homogeneidade das observações onde é tomada a decisão sobre a existência de "outliers" na amostra. A amostra é homogénea sempre que as observações forem geradas pela mesma distribuição, isto é, quando o modelo que assumimos está correcto e portanto não existem "razões estatísticas" para aceitar a presença de valor(es) discordante(s).

Se no teste de homogeneidade for decidida a aceitação, o método termina nessa segunda fase negando, portanto, a existência de qualquer observação discordante. Pelo contrário, a rejeição da homogeneidade das observações conduz à terceira fase do método onde é seleccionada a observação que, de acordo com este critério objectivo, deve ser então declarada "outlier". Assim, na segunda fase do método, temos a decisão fundamental sobre a eventual existência de "outlier" que, apenas na fase seguinte poderá ser seleccionado. Temos, portanto, uma selecção *a posteriori*. Contrariamente aos "métodos tradicionais", este estudo que propomos, selecciona o "outlier" apenas na última fase e só após uma decisão sobre algo que vai "estatisticamente mal" na geração dos dados - a homogeneidade. De facto, tradicionalmente o "outlier" é seleccionado *a priori* e só depois é "usado" um teste de discordância para decidir sobre se essa observação - previamente suspeita aos olhos do investigador - deve ser considerada discordante. A selecção do valor eventualmente discordante é então fortemente condicionada pela experiência do investigador. Diferentes analistas poderão suspeitar de diversos valores.

O modelo de discordância natural considera uma amostra aleatória simples x_1, \dots, x_n , com dimensão n , numa população com funções densidade de probabilidade dependentes de parâmetros δ_i ,

$$f(x; \delta_i), (i = 1, \dots, n).$$

A verosimilhança da amostra é

$$L(x_1, \dots, x_n; \delta_1, \dots, \delta_n) = \prod f(x_i; \delta_i).$$

De um ponto de vista teórico, podemos admitir que todas as variáveis aleatórias em estudo têm densidades com diferentes parâmetros. De um ponto de vista prático - o que mais interessa para uma metodologia de pesquisa de "outliers" - essa formulação apenas complica, e eventualmente torna impossíveis, os cálculos envolvidos na estimação e testes estatísticos de que necessitamos. Além disso, a diversidade de valores para os parâmetros δ_i , não permitiria ser coerente com algum mecanismo de geração dos valores discordantes que, evidentemente, devem "todos" ser oriundos da mesma distribuição; pois, no caso contrário, o caminho a seguir é a reformulação de todo o problema em

estudo. Portanto, naquela hipótese, a generalidade entra em conflito com a aplicabilidade. Assim, no método generativo com alternativa natural, utilizamos o seguinte:

- Modelo de discordância:

- Pela hipótese H_0 - de homogeneidade - admitimos, como aliás na generalidade dos estudos sobre "outliers", que todas as observações x_1, \dots, x_n têm a mesma densidade $f(x_i; \delta)$, ($i = 1, \dots, n$).

Nesta hipótese H_0 , a verosimilhança é $L(x_1, \dots, x_n; \delta) = \prod f(x_i; \delta)$.

- Pela hipótese H - a alternativa natural - admitimos a presença de um valor discordante na amostra e que, em princípio, pode ser uma qualquer das observações.

Seja então H_j a hipótese que admite x_j como observação discordante, isto é, tal que:

- x_j tem densidade de probabilidade $f(x_j; \delta')$, para algum índice $j \in (1, \dots, n)$

- $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ para $i \neq j$, seguem a distribuição com densidade $f(x_i; \delta)$.

Se for válida a hipótese alternativa natural H , existindo portanto uma observação discordante x_j , isso significa que, pelo modelo, é assumida a hipótese H_j responsável pela geração desse "outlier". Sendo assim, a hipótese alternativa natural H pode-se considerar como uma reunião das n hipóteses H_j acima enunciadas. Neste sentido tem-se $H = \cup H_j$. Na alternativa natural, sendo válida a hipótese H_j , temos a verosimilhança $L_j(x_1, \dots, x_n; \delta, \delta') = \prod f(x_i; \delta) f(x_j; \delta')$.

Se representarmos por d o estimador de máxima verosimilhança para δ na hipótese H_0 e por d_j e d'_j os estimadores de máxima verosimilhança para δ e δ' na hipótese H_j temos, para máximos dessas funções, sob H_0 e H_j , respectivamente $L_0(x_1, \dots, x_n; d)$ e $L_j(x_1, \dots, x_n; d_j, d'_j)$ onde, como vimos, o índice j é representativo de que foi admitida a observação x_j como eventualmente discordante e responsável pela perda de homogeneidade na amostra. Estes dois máximos, para simplificação de escrita, serão a seguir representados por M_0 e M_j .

- Teste de homogeneidade:

Para a formulação de um teste de homogeneidade na amostra x_1, \dots, x_n em estudo, comecemos por construir a razão de verosimilhanças I_n dos máximos das funções de verosimilhança. Porque, como foi referido, a hipótese alternativa natural H se pode considerar uma união de n hipóteses H_j , então pode escrever-se

$$I_n = M_0 \max (M_0, \max_j M_j) \quad j=1, \dots, n$$

que, através de um teste de razão de verosimilhanças, gera¹⁹ uma estatística de teste

$$T(x_1, \dots, x_n) = \frac{\max M_j}{M_0}.$$

A razão de verosimilhanças I_n é fundamental neste estudo, por um lado, para a construção da regra de teste de H_0 , de homogeneidade das observações e, por outro, na fase seguinte, para seleccionar o valor discordante que, se tal for o caso, deve ser considerado como responsável pela rejeição dessa hipótese.

Construamos então o teste de homogeneidade da amostra.

Porque $c < 1$, então deve ter-se

$$T(x_1, \dots, x_n) > c'.$$

¹⁹ O detalhe pode ver-se, por exemplo, em Rosado (2006, cap. 4).

Se, para uma amostra x_1, \dots, x_n , a correspondente estatística de teste $T(x_1, \dots, x_n)$ não verifica a condição anterior então, o método generativo com alternativa natural conduz à aceitação da homogeneidade dessa amostra, negando portanto a existência de qualquer observação discordante e terminando, nesta segunda fase, a pesquisa de "outliers".

- Selecção de um outlier:

Supondo rejeitada a hipótese de homogeneidade, aceitando portanto a existência de uma observação discordante, somos conduzidos, pelo próprio método, ao valor x_j que deve ser declarado "outlier". Neste sentido, o método é generativo porque, na última fase, "faz aparecer" a observação responsável pela não homogeneidade da amostra em estudo. O "outlier" que, a posteriori, deve ser seleccionado é aquela observação que corresponde ao índice j onde a estatística $T(x_1, \dots, x_n)$ atinge o máximo, conforme referido acima. Esta observação "outlier" assim descoberta é, vulgarmente, o máximo ou o mínimo da amostra. A discordância estatística de valores numa amostra pode não se manifestar apenas nos extremos. Nalgumas situações²⁰, podemos encontrar outros valores discordantes que não aqueles.

Estas conjecturas tornam-se particularmente pertinentes sempre que a subjectividade isto é a informação *a priori* se torna basilar. No estudo assim proposto é com base numa selecção *a posteriori* que se deve decidir sobre "o controlo" e a influência do valor discordante que "perturba" a inferência estatística nos *prior*.

Já ligámos a subjectividade e a análise bayesiana no estudo de outliers.

Daqui à Estatística Forense é um passo.

Estatística Forense

A Estatística Forense é um domínio muito recente inserido no âmbito da Ciência Estatística. Como surgiu? Talvez por acaso - decerto também! - ou pela necessidade de resolução de problemas (reais!). No fundo, tal como no passado, também aconteceu²¹ em outros domínios científicos - desde a Física até à Metafísica.

A Estatística Forense já entrou²² nos "temas de topo" - quer no domínio científico quer no campo profissional. Um dos pontos altos foi atingido na discussão científica do caso "Sally Clark"²³.

A jeito de introdução ao tema e, também pela importância que lhe é dada podemos usar uma citação da página Web da Royal Statistical Society. "**The importance of forensic statistics.** Forensic statistics is the application of statistics to forensic science and the law. Broadly speaking, forensic science is the analysis of traces of evidence (such as body fluids, glass fragments, footprints and drugs) left at the scene of a crime by the criminal, victim or others. This evidence may be used subsequently to either implicate or exonerate a person suspected of committing that crime, or just to gain further insight into the incident. Over the years, with increasing technological advancement, forensic science has become a key part of criminal investigations worldwide. But forensic science doesn't just involve identifying traces of evidence – sometimes it isn't obvious just what a piece of evidence really is. Other important questions that need to be answered are just how the evidence came to be at the crime scene, where did it originally come from, and who left it there. This suggests a natural role for statistics, as these questions can typically only be answered in terms of probabilities. So it is not surprising that the primary task of forensic statisticians is to evaluate any evidence found at a crime scene, so that this evidence can be appropriately presented to a jury in court. This task obviously carries great responsibility. The advent of DNA profiling in the 1980s brought a big change in the way the legal system viewed quantitative data. Now a quantitative approach is being requested

²⁰ Desenvolvimento pode ver-se em Rosado (2006, cap. 7).

²¹ Uma reflexão sobre o tema especialmente no que a outliers diz respeito pode ver-se em Rosado (2009) - um texto de divulgação.

²² É muito interessante analisar esta temática em http://www.rss.org.uk/pdf/Careers_forensic4.pdf da Royal Statistical Society.

²³ <http://www.sallyclark.org.uk/>

in many areas, far removed from the original area of DNA profiling. The earlier research and development work is being applied and further work is being done to tackle the increasingly more complex cases which arise in bringing a sound statistical approach to the assessment of evidence. (...)

Finally, an important part of being a forensic statistician, as indeed it is for any statistician, is the ability to communicate results effectively to non-statisticians. Forensic statisticians are often required to attend court cases as "expert witnesses". This involves reporting calculated probabilities, or other statistical measures, to the jury, and explaining to them how the calculations were performed. This is a challenge in itself, as the jury will typically consist of people who have little knowledge of statistical methods, and is further complicated by the need to choose careful wording (so as not to "lead" the jury into a decision on guilt or innocence of a defendant)."

A Estatística Forense "deu os primeiros passos" em termos de congressos internacionais, há cerca de 20 anos. Em 1990 foi organizada, em Edimburgo, a primeira conferência internacional e que tem mantido uma periodicidade de três anos. A última²⁴, no ano passado, salientava como objectivos:

"Forensic statistics, the application of statistics and probability to legal matters, is a rapidly evolving field. The current debates surrounding the presentation of evidence based on DNA profiling and the epidemiological studies on the health effects of various drugs are but two examples. The logical issues involved in forensic science are subtle, and entail cross-disciplinary work with experts in diverse fields such as statistics, genetics, law and computer science. Forensic science is experiencing a period of rapid change, essentially because of the tremendous evolution in DNA profiling to the point that DNA is nowadays considered as the "gold standard". Because DNA evidence is essentially probabilistic, the quest for numbers and probabilistic models in other traditional identification fields (such as fingerprints, handwriting or toolmarks) has increased under the call from both the scientific and the legal community. The paradigm shift towards a probabilistic approach in forensic identification fields other than DNA will be an important theme to address during this conference.

DNA evidence has transformed the proof of identity in criminal cases, but it has also introduced daunting problems of statistical analysis into the process. The sensitivity and discrimination of techniques now in routine use in many countries were undreamed of a decade ago.

Other research issues range from the sampling and interpretation related to quantity estimations of drugs and the discrimination between samples of drugs to determine if they came from the same source, to pattern recognition (fingerprints, ear prints, video images, and cranium-facial identification), phonetics (for voice recognition), and fact analysis involving the construction, reconstruction and criticizing arguments about disputed questions of fact. Other research issues range from the sampling and interpretation related to quantity estimations of drugs and the discrimination between samples of drugs to determine if they came from the same source, to pattern recognition (fingerprints, ear prints, video images, and cranium-facial identification), phonetics (for voice recognition), and fact analysis involving the construction, reconstruction and criticizing arguments about disputed questions of fact."

Do ponto de vista histórico - científico as citações formuladas podem ser usadas para aprofundar e saber quais os temas científicos²⁵ em torno dos quais nos devemos centrar. E o ADN é²⁶ um deles...

²⁴ <http://www2.unil.ch/icfis/overview.html>

²⁵ Outras reflexões podem observar-se em Rosado e Neves (2008a) e Rosado e Neves (2008b).

²⁶ Fundamentais, são os estudos de Andrade (2001) e Andrade (2007).

“Um Exemplo”

Consideremos o bem conhecido conjunto de “dados de astronomia” estudados por Peirce e também por Chauvenet, já referenciado²⁷ em Rosado (2006, p. 7, 168 e 199) e também em Barnett and Lewis (1994, p. 38). Os estudos, apresentados por Peirce em 1852 e por Chauvenet em 1863 usam 15 observações feitas por Lt. Herndon em 1846 no planeta Vénus e analisam os resíduos dessas observações após construírem um modelo.

Deve registrar-se, desde logo, a partir dos títulos dos respectivos trabalhos, o pioneirismo e a sensibilidade para os problemas que, só muito mais tarde, viriam a ser sistematizados. O valioso critério de Chauvenet é, ainda hoje, utilizado em muitos exemplos práticos, principalmente em estudos “menos aprofundados”.

Esses resíduos são:

$$\begin{aligned} & - 0.30, + 0.48, + 0.63, - 0.22, + 0.18 \\ & - 0.44, - 0.24, - 0.13, - 0.05, + 0.39 \\ & + 1.01, + 0.06, - 1.40, + 0.20, + 0.10 \end{aligned}$$

Se admitirmos um mecanismo normal para a geração destes valores, o mínimo -1.4 torna-se suspeito? Um teste de discordância pode ser produzido considerando o “desvio” ou o “quociente entre afastamentos” para aquela observação. Estamos então introduzindo mecanismos de identificação de outliers. De entre os mais importantes salientam-se os testes de discordância. Em ambos os casos, conforme estudado em Rosado (2006) aquele valor não é discordante ao nível de significância 0.05. Nos referidos estudos, Peirce (1852) e Chauvenet (1863), subjectivamente, consideraram que aquele valor -1.40 deve ser rejeitado. Aprofundemos um pouco a análise. Segundo a metodologia tradicional para o estudo de outliers neste exemplo²⁸ podemos utilizar duas estatísticas de teste

$$t_1 = (\bar{x} - x_{(1)}) / s$$

e

$$t_2 = (x_{(2)} - x_{(1)}) / (x_{(n)} - x_{(1)}).$$

Em ambas as estatísticas t_1 e t_2 são usados os chamados “critérios de Chauvenet” que avaliam as distâncias e os afastamentos em relação “ao que é esperado”. A tabela XIIIa de Barnett and Lewis (1994) fornece os pontos críticos para t_1 : 2,41 e 2,71 para os habituais níveis de significância de 5% e 1% respectivamente. O “suspeito” -1.4 na estatística t_1 toma o valor 2.58. Assim, segundo o método tradicional, aquele mínimo deve ser considerado outlier ao nível de 5% mas não ao nível de 1%. A tabela XIXa de Barnett and Lewis (1994) fornece os pontos críticos 0.34 e 0.44 em condições análogas às anteriores. Então, porque $t_2 = 0.44$, devemos concluir analogamente através do uso desta estatística. Em conclusão, seguindo Barnett and Lewis (1994) devemos concluir que em ambos os testes aquela observação -1.4, subjectivamente seleccionada, não deve ser considerada discordante ao nível de 1%, embora possa ser “declarado outlier” ao nível de significância de 5%.

A aplicação do método GAN conduz a uma conclusão diferente.

De facto, esse método permite tomar a decisão estatística²⁹ de que a amostra é homogénea, não havendo portanto outlier.

Hawkins (1980, cap. 9) usa este mesmo exemplo para um estudo no âmbito da análise bayesiana de outliers.

²⁷ Porque contém algumas imprecisões, nos breves cálculos que a seguir apresentamos vamos precisar a análise por nós já feita, e também por Barnett and Lewis (1994, p. 38).

²⁸ Cf. Barnett and Lewis (1994, p. 38)

²⁹ Rosado (2006, p. 7, 168, 199) aprofunda a reflexão com este exemplo e introduz a temática da influência da dimensão da amostra na análise de outliers em dados estatísticos.

Com a utilização da razão das chances, Hawkins (1980, p. 121) conclui que -1.4 deve ser declarado outlier.

A metodologia aí utilizada é muito bem vinda para uma reflexão no âmbito do estudo de observações discordantes num contexto bayesiano.

A importância da Razão das Chances³⁰ e Análise de Sensibilidade - “Um método?”

As chances³¹ constituem um ponto de partida para a discussão na actividade forense.

As redes bayesianas são formalismos que, principalmente do ponto de vista prático, ajudam a ciência forense na aplicação de uma metodologia probabilística. Elas são o suporte de um dos mais recentes avanços no estudo³² da inferência nessa ciência.

Mas, a comparação de hipóteses é sempre apoiada e decidida com base em observações. Em qualquer amostra de dados estatísticos, e de acordo com o ponto de vista bayesiano, nenhuma observação deve ser rejeitada.³³ Mas, porque surgem observações discordantes e o que se deve fazer com elas? Uma excelente síntese dos principais pontos de vista pode seguir-se em Barnett and Lewis (1994, cap. 2). No limite, a discussão estabelece-se em torno da questão da rejeição ou da continuidade de uma observação outlier na amostra.

Na nossa perspectiva, o estudo de outliers em dados estatísticos deve estar acima desse patamar e decidir-se apenas pela identificação “não subjectiva” de observações suspeitas e considerar o seu registo para “memória futura” desse estudo.

Barnett and Lewis (1994, p.379) consideram “irrelevante” o teste de discordância em “tratamento de outliers bayesianos”. Optam pela acomodação de outliers numa perspectiva bayesiana. Hawkins (1980, cap. 9) apresenta um “teste” e estuda-o através do exemplo “de astronomia”. Dada a relevância daquela perspectiva, este teste usando a razão de vantagens - odds ratio - pode ser particularmente interessante no estudo de outliers em Estatística Forense. Assim, também pode ser feita uma simbiose, inclusive, com (e no âmbito das) redes bayesianas³⁴

Em conclusão: podemos encontrar “um método não bayesiano” para estudo de outliers “bayesianos”. Essa proposta pode partir de um estudo da homogeneidade da amostra que de um ponto de vista geral e não subjectiva pode apoiar a decisão sobre a suspeição de algum valor discordante. Se essa suspeita se confirmar o método GAN indica o principal suspeito e na fase seguinte uma análise da razão das chances complementa aquela decisão e completa-a se utilizada numa perspectiva bayesiana. A Estatística Forense, em diversos momentos, exige e usa a estatística bayesiana. A complementaridade entre GAN e ODDS RATIO é um bem que se deve explorar!

Bayes nos tribunais – uma perspectiva (com história)

O objectivo principal de um estatístico (da Estatística) é inferir. Uma inferência estatística pode ser (apenas) uma conclusão ou, muito mais geral, apresentar uma dedução com base num raciocínio apoiado por uma metodologia específica. Esta - que se pode considerar o problema fundamental da Ciência Estatística - é um desafio científico que, ao longo dos tempos, produziu diversas formas de abordagem dita “correntes ou escolas”. Como já vimos e numa síntese bipolar³⁵ é costume apresentar (apenas): a clássica e a bayesiana - a primeira, com pontos de partida em Fisher ou Neyman e a segunda “guiada” pelas ideias de Bayes.

³⁰ Uma perspectiva que combina a razão das chances com a razão das verosimilhanças - com um bom exemplo prático - pode ver-se em Taroni *et al* (2006, cap. 1).

³¹ Uma reflexão do ponto de vista do cálculo da prova pode ver-se em Aitken and Taroni (2004, cap. 3). Sobre a interpretação das chances consulte-se o cap. 7 da mesma obra. Igualmente importante é o capítulo 1 sobre a incerteza, a estatística e a lei no âmbito da ciência forense.

³² Cf. Andrade (2007).

³³ Cf. de Finetti (1961, p. 203).

³⁴ Para um possível exemplo de aplicação com normais, ver Taroni *et al* (2006, p. 301 e seg).

³⁵ Aprofundamento, por exemplo, em Paulino, *et al* (2003).

A Estatística Forense, tal como a Bioestatística, por exemplo, aproxima cientistas de áreas diferentes e que, para benefício comum, devem cooperar. Esta aproximação toma relevo particular se “as formações em causa” têm a sua base nas ciências (ditas) exactas ou sociais. Nestas, decerto, é maior o antagonismo em presença. Fisher, em *Statistical Methods for Research Workers*, afirma³⁶ que: “The prime object of this book is to put into the hands of research workers and especially of biologists accurately...”. É, neste espírito científico que se devem delinear as propostas de métodos estatísticos para os cientistas forenses também, e principalmente, no domínio da teoria dos outliers “dada a complexidade matemática” (como também refere Fisher na citada obra e a propósito dos biólogos). No que respeita aos outliers poderemos juntar as especificidades estatísticas que abordámos.

Bayes e a abordagem bayesiana são assuntos que perpassam na obra citada de Fisher e, como sabemos, por maioria de razão neste texto. “Thomas Bayes’ celebrated essay published in 1763 is well known as containing the first attempt to use the theory of probability as an instrument of inductive reasoning; that is, for arguing from the particular to the general, or from the sample to the population. It was published posthumously, and we do not know what views Bayes would have expressed had he lived to publish on the subject. We do know that the reason for his hesitation to publish was his dissatisfaction with the postulate associated with “Bayes Theorem”. While we must reject this postulate, we should also recognize Bayes’ greatness in perceiving the problem to be solved, in illustrating the possibility of its experimental solution, and finally in realizing more clearly than many subsequent writers the weakness of the axiomatic method”³⁷.

Em *Statistical Methods and Scientific Inference*,³⁸ é proposta nova reflexão sobre “o bayesianismo” e a sua utilização na inferência *a posteriori*. Aí, Fisher reconhece que se deve a Bayes a primeira tentativa “to give a rational account of the process of scientific inference as a mean of understanding the real world”³⁹. Mas, logo de seguida, Fisher⁴⁰ pronuncia-se sobre as dificuldades dessas primeiras tentativas. Igualmente importante é, no nosso contexto, considerar as citações que Fisher apresenta na introdução a “*Statistical Methods and Scientific Inference*”: “We use Reason for improving the Sciences; whereas we ought to use the Sciences for improving our Reason” (Antoine Arnauld, 1662, *The Port-Royal Logic*); Another use to be made of this Doctrine of Chances is, that it may serve in Conjunction with the other parts of the Mathematics, as a fit Introduction to the Art of Reasoning. (de Moivre, 1718) e ainda “If logic investigates the general principles of valid thought, the study of arguments, to which it is rational to attach some weight, is as much part of it as the study of those which are demonstrative. (J. M. Keynes, 1921)”⁴¹

³⁶ Fisher (1990, p. 16)

³⁷ *Ib.* p. 20-1.

³⁸ Fisher (1990)

³⁹ *Ib.* p.8.

⁴⁰ *Ib.* capítulo II.

⁴¹ Para aprofundar esta perspectiva, é fundamental Thompson (2007). Thompson (2007) é um trabalho científico cujo propósito é discutir, como e se os métodos estatísticos fazem sentido. A discussão é iniciada com o tradicional “fundamentos da Estatística” presente nos tratados e que, segundo este autor, apenas ajudam a evitar as grandes controvérsias. Em seguida - como objectivo – propõe um caminho de reflexão sobre: “in what sense do statistical methods provide scientific evidence”. (p. 130). Esta temática é de particular relevância na Estatística Forense e toda a actual abordagem se pode considerar como “um caminho na pesquisa de outliers” onde se permitirá questionar sobre “bayesianismo”, “verosimilhança” e “show-me evidence”. Em particular, no capítulo 9, o autor apresenta excelentes propostas de reflexão sobre o uso da metodologia bayesiana. “Subjective Bayesianism has lost ground in recent years (...)”, Thompson (2007, p. 94). Também na Estatística Forense, por maioria de razão, a inferência bayesiana pode ficar fragilizada pois, “The posterior probability (...) the appropriateness of Bayesian inference depends on one’s assumptions about repeated performance of an experiment (...)” Thompson (2007, p. 96). Os capítulos 10 e 11 reforçam as várias direcções na teoria da decisão estatística.

O reforço da importância do uso da “razão das chances” / “razão de verosimilhanças” como “ponto mais importante e a chave de todo o método” no trabalho da construção da prova no campo da genética e do DNA pode ver-se, por exemplo, em Evett and Weir (1998). Uma revisão deste tema pode ver-se em Foreman *et al* (2003).

Curran (2003), por sua vez, apresenta e introduz a mesma problemática no domínio da “glass evidence”.

Barnett (1999), para a inferência estatística comparada, no capítulo 8, e de um ponto de vista geral, estabelece boas conclusões metodológicas, em particular, no reforço do uso da abordagem via verosimilhança. Sobre isso consulte-se também Birnbaum (1962).

O interesse da inferência estatística aumenta com a qualidade dos dados. E, são estes a base do trabalho: a principal matéria-prima. Ao longo do século XX foram surgindo propostas científicas com novas ideias para inferência e radicadas naquelas opções metodológicas - também na Teoria dos Outliers! Foi assim que se foi alargando o campo dos simples testes de discordância e se foi caminhando em modelos e técnicas mais sofisticadas que levaram a estudos de acomodação e de análise⁴² de sensibilidade⁴³. Numa perspectiva bastante interessante, Pettit and Smith⁴⁴ (1985) acrescentam o ambiente bayesiano para conjugar a análise da sensibilidade com a influência nos modelos lineares, no estudo de outliers.

A investigação em Estatística Forense é um domínio de excelência para o investimento científico no futuro da Ciência Estatística. É, também, um ramo onde a Estatística, como ciência transversal, se mostra como fundamental na investigação. Estatística Forense é a referência científica actual para uma actividade de investigação que existe há bastante tempo mas para a qual os avanços no domínio da genética têm vindo a tornar mais aplicada e, cada vez mais, com a exigência de grandes desafios. Um deles, está na Teoria dos Outliers!

A Estatística Forense está, cada vez mais envolvida, com a Ciência Forense⁴⁵ e, por consequência, nos tribunais; também, no estudo de observações discordantes. Os primeiros bons exemplos desse envolvimento apareceram já há cerca de 60 anos (Rosado (2006) p. 9, 10 e 204; Barnett and Lewis (1994, cap 1).

Uma pesquisa simples em documentos científicos envolvendo “o teorema de Bayes” e a “Estatística Forense” fornece, principalmente, a ligação desses dois temas e é enorme o número de publicações que os “aprofundam” em diferentes direcções. Por diversas vezes, são os não estatísticos que publicam reflexões sobre essa temática que envolve a “velha questão” sobre a inferência estatística – frequencista ou bayesiana?

Toda a decisão envolve as probabilidades. No contexto, podemos considerar as duas principais perspectivas que se focam na teoria frequencista (via axiomática, por exemplo de Kolmogorov) e na teoria subjectivista (por exemplo, em de Finetti). Na Estatística, cada vez mais, vemos incluídas essas duas vertentes. E muita reflexão tem sido apresentada (também) no âmbito da Ciência Forense e pelos mais diversificados cientistas; por exemplo, Cohen, um filósofo britânico muito citado⁴⁶ sempre que, no âmbito “dos tribunais” se produzem “orações” com Bayes e a temática Forense. Outro interessante exemplo daquela ligação surge no recente livro⁴⁷ do estatístico Salsburg onde é revisitado o velho “Lady Testing Tea” numa versão século XXI além de outras interessantes abordagens de questões fulcrais como “The Bayesian Heresy”. Salsburg mostra como a Estatística é importante e fundamental no desenvolvimento de outras ciências. Peguemos neste exemplo clássico com “a boa provadora do chá”. Ele, de facto, coloca uma “situação de tribunal” pois o problema proposto exige que se prove se a senhora sabe conhecer se “o chá foi deitado na chávena antes da necessária nuvem de leite ou depois dela”. Um estatístico (admitamos que foi Fisher!) assiste à reunião social e a quem é proposta a tarefa de delinear uma experiência que permita verificar a afirmação da provadora de chá. É um desafio interessante pois coloca a decisão no plano do estatístico de cuja verdade científica ninguém vai duvidar e que vai servir para provar a verdade da provadora. De facto, o problema estatístico em causa é um teste de hipóteses. Para o resolver o Estatístico dispõe de várias “técnicas” que vão desde a realização de um teste sequencial até à fixação de um certo número de chávenas de chá para provar – das quais metade seriam cheias de um modo e as restantes do outro. E que seriam apresentadas de um modo aleatório. Também se pode optar por um certo número de chávenas onde seria aleatório o número de cada uma das partes. Ou então, formar n pares de chávenas cheias uma de um modo e a outra do outro modo, consoante o resultado aleatório de uma moeda. Este, o mais elaborado, é o

⁴² Cf. Barnett and Lewis (1994, secção 9.2)

⁴³ Uma possível tradução para termos que envolvam “influence function”, “influence curve” ou “sensitivity curve”. (Barnett and Lewis (1994)).

⁴⁴ Este artigo contém contribuições muito importantes de autores que colaboram na discussão.

⁴⁵ Cf Rosado e Neves (2008a), Rosado e Neves (2008b) e Rosado e Neves (2008c).

⁴⁶ Cf. “The Probable and the Provable” (Clarendon Library of Logic & Philosophy) Oxford University Press, 1977.

⁴⁷ Cf. David Salsburg (2002) - *The Lady Tasting Tea: How Statistics Revolutionized Science in the Twentieth Century*. Freeman and Company

método que conduz ao uso do modelo binomial. Então, na base da decisão está sempre um teste de hipóteses. Esse teste de hipóteses faz intervir o instrumento básico da análise estatística: a verosimilhança da amostra. E, como sabemos, na elaboração da regra de decisão são basilares as probabilidades de rejeição e de aceitação quer da hipótese nula quer da hipótese alternativa. De novo surgem as probabilidades a condicionar a opção. E, como já vimos, para a Estatística Forense a opção Bayes tem sido muito escolhida. Como também já reflectimos - porque muito específica - esta opção deve ser “repensada” no âmbito da teoria dos outliers.

As observações discordantes, tradicionalmente, são extremos, contaminantes ou outliers⁴⁸.

Qual a adaptação desta frase à Estatística Forense? Qual o significado de cada um daqueles termos em Estatística Forense?

III - ... em jeito de conclusão; uma proposta de trabalho...

Sobre “bayesianos”, “frequentistas” e “cientistas”, Efron (2005), diz-nos que: “Broadly speaking, 19th century statistics was Bayesian while the 20th century was frequentist, at least from the point of view of most scientific practitioners. Here in the 21st century scientists are bringing statisticians much bigger problems to solve, often comprising millions of data points and thousands of parameters. Which statistical philosophy will dominate practice? My guess, backed up with some recent examples, is that a combination of Bayesian and frequentist ideas will be needed to deal with our increasingly intense scientific environment. This will be a challenging period for statisticians, both applied and theoretical, but it also opens the opportunity for a new golden age, rivaling that of Fisher, Neyman, and the other giants of the early 1900’s.”

Fisher e Mahalanobis descreveram a Estatística como a tecnologia chave do século XX. Desde então assistiu-se a uma evolução da Estatística no campo das aplicações em todas as ciências e áreas do saber tecnológico⁴⁹ bem como no domínio da teoria da decisão - tais como nos cuidados de saúde, no negócio, nas estatísticas oficiais e nos procedimentos legais. A Estatística Bayesiana surgiu como paradigma com liderança em muitos desses campos talvez por uma racionalização de métodos de decisão em conjugação com o Teorema de Bayes que actua como a base do seguidor e das suas aplicações em cenários de prova. O método bayesiano não é novo, como sabemos. O ressurgimento fica garantido com a descoberta de diversos paradoxos e problemas de lógica na estatística clássica.

O Teorema de Bayes aparece “muitas vezes” como instrumento de trabalho para a investigação estatística no âmbito da prova em tribunal. Algumas objecções podem ser apresentadas para o uso (e abuso?) dessa metodologia e talvez a primeira possa ser aquela que se prende com o (aparentemente) fácil convencimento das soluções apresentadas.

As soluções bayesianas parecem(?) boas! Mas, algumas objecções se podem apresentar. Um primeiro argumento pode ser que um júri pode assim usar a prova duas vezes: primeiro, na avaliação inicial sobre a culpa, isto é, para determinar probabilidades a priori e uma segunda vez quando aplica a metodologia de Bayes. Uma segunda objecção - talvez mais importante - envolve a presunção de inocência. Se um acusado é inocente até ser condenado então a probabilidade *a priori* de ser culpado deve ser zero. Este pressuposto, tem uma conclusão dramática. De facto, naquela hipótese, pela aplicação da metodologia bayesiana, temos a probabilidade (*a posteriori*) de culpa também nula. E, se assim é, a audiência em tribunal fica desvalorizada⁵⁰.

O futuro passa então por uma combinação estratégica no uso das tradicionais metodologias estatísticas?

O que se passa com a teoria dos outliers em “ambiente bayesiano”? O estudo de outliers exige a resolução de problemas muito específicos - desde os modelos aos testes de discordância. Para além disso a subjectividade da escolha do valor discordante que se testa ou das variáveis que os apontam

⁴⁸ Cf. Rosado (2006, p. 11-4).

⁴⁹ Para uma completa descrição e aprofundamento em cada domínio, pode consultar-se Dey and Rao (2005).

⁵⁰ Alguns exemplos de reflexão sobre esta temática podem ver-se em Good and Hardin (2006).

como tal é uma diferente dificuldade característica da análise de valores discordantes. É a descoberta da “variável fulcral” que, em cada caso, fornece⁵¹ a reconhecida capacidade do estatístico para poder (sempre) provar a sua tese.

Uma viagem por aquele ambiente e com propostas de trabalho foi o que tentámos fazer nesta nota. Mas, quando tudo está dito e feito devemos registar a especificidade e a subjectividade características do estudo de observações que, para além da problemática da Estatística ainda acrescenta a dificuldade da definição: O que é um Outlier em Estatística Forense? Na procura da(s) resposta(s), já com informação *a priori*, decerto criaremos ciência, solidificaremos a Estatística (também naquele domínio) e concretizaremos o prenunciado por Holmes (1897) sobre os estatísticos no “meio das leis”.

É o momento, sempre no presente, em que o futuro já chegou!

Referências

- Aitken, C. and Taroni, F. (2004) - *Statistics and Evaluation of Evidence for Forensic Scientists*. 2ª edição. Wiley.
- Aitken, C., Shen, Q., Jensen, R, and Hayes, B. (2007) - The evaluation of evidence for exponentially distributed data. *Comp. Stat & Data Analysis*, 5682-93.
- Andrade, M. (2001) - *O teorema de Bayes como Ferramenta Auxiliar em Análise Forense*. Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa.
- Andrade, M. (2007) - *A Estatística bayesiana na Identificação Forense - análise e avaliação de vestígios de DNA com redes bayesianas*. Tese de Doutoramento. ISCTE.
- Anscombe, F. J. (1960) - Rejection of Outliers. *Technometrics* 122-47.
- Barnett, V. (1999) - *Comparative Statistical Inference*. Wiley. 3ª edição.
- Barnett, V. and Lewis, T. (1978) - *Outliers in Statistical Data*. 1ª edição. Wiley.
- Barnett, V. and Lewis, T. (1984) - *Outliers in Statistical Data*. 2ª edição. Wiley.
- Barnett, V. and Lewis, T. (1994) - *Outliers in Statistical Data*. 3ª edição. Wiley.
- Beckman, R. J. and Cool, R. D. (1983) - Outliers.....s. *Technometrics* 119-63 (with discussion).
- Birnbaum, A. (1962) - On the foundation of statistical inference (with discussion). *Journal of American Statistical Association* 269-77.
- Box, G. and Tiao, G. (1968). A Bayesian approach to some outlier problems. *Biometrika*, 119-29.
- Chauvenet, W. (1863) - Method of Least Squares. Appendix to *Manual of Spherical and Pratical Astronomy*. Lippincot. Reprinted (1960) 5ª edição.
- Collett, D. and Lewis, T. (1976) - The Subjective Nature of Outlier Rejection Procedures. *Applied Statistics*, 228-37.
- Cox, D. R. (1978) - Foundations of statistical inference; the case of eclecticism (with discussion). *Australian Journal of Statistics*, 43-59.
- Curran, J. M. (2003) - The Statistical Interpretation of Forensic Glass Evidence. *International Statistical Review* 497-520.
- Dey, D. K. and Rao, C. R. (2005) (eds.) - *Bayesian Thinking Modeling and Computation*. Handbook of Statistics, vol. 25.
- Dempster, A. P. and Rosner, B. (1971) - Detection of outliers. In Gupta and Yackel (eds) (1971) *Statistical Decision Theory and Related Topics*. Academic Press.
- Efron, B. (2000) - R. A. Fisher in the 21st Century. In Rao and Székely (eds) (2000) - *Statistics for the 21st Century. Methodologies for Applications of the Future*. Marcel Dekker.
- Efron, B. (2005) - Bayesians, frequentists, and scientists. *JASA* 100, 1-5.
- Evet, I. W. and Weir, B. S. (1998) - *Interpreting DNA Evidence. Statistical Genetics for Forensic Statisticians*. Sinauer nAssociates.
- Ferguson, T. S. (1961) - On the rejection of outliers. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 253 - 287.

⁵¹ Cf. Rosado (2006, p. 48), em particular, para um exemplo.

- Ferguson, T. S. (1961) - Rules for rejection of outliers. *Rev. Inst. Int. de Statist.* 29-43.
- de Finetti, B. (1961) - The Bayesian approach to the rejection of outliers. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 199 - 210.
- Fisher, R. A. (1922) - On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Statistical Society*, vol. 22, 309-68.
- Fisher, R. A. (1990) - *Statistical Methods, Experimental Design and Scientific Inference*. Oxford Science Publications.
- Foreman, L. A., Champod, C., Evett, I. W. , Lambert, J. A. and Pope, S. (2003) - Interpreting DNA Evidence: A Review. *International Statistical Review* 473-95.
- Good, P. I. e Hardin, J. W. (2006) - *Common Errors in Statistics (and How to Avoid Them)*. 2ª edição. Wiley.
- Guttman, I. (1973) - Care and handling of univariate or multivariate outliers in detecting spuriousity - a Bayesian approach. *Technometrics* 723-8.
- Hawkins, D. M. (1980) - *Identification of Outliers*. Chapman and Hall.
- Kale, B. K. and Sinha, S. K. (1971) - Estimation of expected life in the presence of an outlier observation. *Technometrics*. 755-9.
- Lehmann, E. L. (1993) - The Fisher, Neymann-Pearson Theories of Testing Hypotheses: One Theory or Two? *Journal American Statistical Association*. 1242 -49.
- Lindley, D. V. (1977) - A problem in forensic science. *Biometrika*, 207-13.
- Lindley, D. V. (1990) -The 1988 Wald Memorial Lectures; The Present Position in Bayesian Statistics. *Statistical Science*, 44-89.
- Muñoz-Garcia, J., Moreno-Rebolo, J. L. and Pacual-Acosta, A. (1990) - Outliers: A formal approach. *Inst. Statist Rev.* 215-26.
- O'Hagan, A. (1994) - *Kendall's Advanced Theory of Statistics, vol. 2B, Bayesian Inference*. Arnold.
- Paulino, D., Amaral-Turkman, M. A. e Murteira, B. (2003) - *Estatística Bayesiana*. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Peirce, B. (1852) - Criterion for the rejection of doubtful observation. *Astronomic Journal*, 161-3.
- Pettit, L. I. and Smith, A.F.M. (1985) - Outliers and Influential Observations in Linear Models. *Bayesian Statistics 2*. 473-94. Edited by Bernardo, Degroot, Lindley and Smith. North- Holland.
- Rao, C. R. (2000) - R. A. Fisher: The Founder of Modern Statistics. (in Rao and Székely (2000)).
- Rao, C. R. and Székely, G. J. (eds.) (2000) - *Statistics for the 21st Century. Methodologies for Applications of the Future*. Marcel Dekker.
- Rosado, F. (1984) - *Existência e Detecção de Outliers - Uma Abordagem Metodológica*. Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa.
- Rosado, F. (2006) - *Outliers em Dados Estatísticos*. Edições SPE - Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Rosado, F. e Neves, M. (2008a) - Sobre a Crescente Importância da Estatística na Ciência Forense. *Technical Report CEAUL 1/2008*.
- Rosado, F. e Neves, M. (2008b) - Notes on Forensic Statistics and Outlier Identification. *Technical Report CEAUL 25/2008*.
- Rosado, F. e Neves, M. (2008c) - Forensic Statistics and Outlier Identification. Comunicação apresentada na 7th *International Conference on Forensic Inference and Statistics*.
- Rosado, F. (2009) - Introduzindo Outliers. *Boletim SPE Primavera de 2009 da Sociedade Portuguesa de Estatística*, p. 60-4.
- Santos, R. (2008) - *Probabilidade Circa 1914 e a Construção de Pacheco d'Amorim*. Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa.
- Stuart, A., Ord, J. K. and Arnold, S. (1999) - *Kendall's Advanced Theory of Statistics, vol 2A Classical Inference and Relationship*. Arnold.
- Taroni, F., Aitken, C., Garbolino, P. e Biedermann, A. (2006) - *Bayesian Networks and Probability Inference in Forensic Science*. Wiley.
- Thompson, B. (2007) - *The Nature of Statistical Evidence*. Springer.